ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА
№ 4 • 1985

УДК 681.3:519:007.52

ФОРМАЛЬНО-ЛИНГВИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ. II. ЯЗЫК ЗОН, ПЕРЕВОДЫ И ПРОБЛЕМА ГРАНИЦ

ШТИЛЬМАН Б. М.

Введение. В работе, продолжающей [1], рассмотрена формализация метода ПИОНЕР для решения переборных задач большой размерности, разработанного путем развития и обобщения алгоритма М. М. Ботвинника. Метод может быть использован в задачах исследования операций: в настоящее время он широко применяется в автоматизации планирования ремонтов энергооборудования электростанций.

Введенный в [1] язык траекторий позволяет описывать «одномерные» объекты — траектории элементов системы. При построении этого языка для соединения символов в цепочку было использовано отношение достижимости $R_p(x, y)$ [1]. Для описания статики изучаемой системы, т. е. ее состояний, мы введем «двумерные» объекты, составленные из траекторий (траекторные сети и зоны), воспользовавшись отношением связи траектории $C(t_1, t_2)$ (см. ниже). Для изучения динамики системы, т. е. взаимосвязи между описаниями состояний при переходах системы из одного состояния в другое, определим переводы (отображения) языков траекторий и зон. Изучение свойств переводов позволит нам дать формальное решение проблемы эффективного описания границ между актуальной и устаревающей информацией о системе в процессе перебора вариантов ее функционирования (поиска оптимального плана). Это будет сделано путем разделения языка зон на изменяемую и неизменную части при переводах и указания алгоритма пересчета изменяемой части. Перейдем к формальному изложению, используя определения и результаты [1].

1. Траекторные сети и зоны. Определение 1.1. Траектория $t_1 = \alpha(x_0)\alpha(x_1)\ldots\alpha(x_k)$, $t_1 \neq e$ *связана* с траекторией $t_2 = \alpha(y_0)\alpha(y_1)\ldots\alpha(y_m)$, $t_2 \neq e$, т. е. имеет место $C(t_1, t_2)$, если среди параметрических букв $\mathscr{P}(t_2)$ траектории t_2 найдется $y_i = x_k$. Если t_1 принадлежит некоторому пучку траекторий, то и весь пучок назовем связанным с траекторией t_2.

Определение 1.2. *Связкой* траекторий для траектории t относительно множества траекторий B называется совокупность траекторий $CA_B(t) \subset B$, с которыми связана траектория t.

Определение 1.3. *K-я степень отношения C* на множестве траекторий A (обозначается $C_A{}^k$) определяется, как обычно. Для $k=1$ $C_A{}^k(t_1, t_2)$ совпадает с $C(t_1, t_2)$ $(t_1 \in A,\ t_2 \in A)$. Для $k>1$ $C_A{}^k(t_1, t_2)$ тогда и только тогда, когда существует такая траектория $t_3 \in A$, что $C(t_1, t_3)$ и $C_A^{k-1}(t_3, t_2)$.

Определение 1.4. *Транзитивное замыкание* отношения C на множестве траекторий A (обозначается $C_A{}^+$) — это отношение, для которого $C_A{}^+(t_1, t_2)$, тогда и только тогда, когда $C_A{}^i(t_1, t_2)$ для некоторого $i \geqslant 1$, $t_1, t_2 \in A$.

Определение 1.5. *Траекторной сетью W* называется конечная совокупность траекторий из $L_t{}^H(S)$ $t_0, t_1, \ldots, t_k$, обладающая следующим свойством: для всякой траектории $t_i \in W$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ имеет место $C_W{}^+(t_i, t_0)$.

Это означает, что каждая траектория сети связана с выделенной траекторией t_0 посредством некоторого подмножества траекторий сети, связанных друг с другом.

Определение 1.6. *Семейством языков траекторных сетей* $L_c(S)$ в состоянии $S\in\Sigma$ называется семейство языков, содержащих цепочки вида $t(t_1,\ldots)t(t_2,\ldots)\ldots t(t_m,\ldots)$ (многоточие в скобках заменяет прочие параметры конкретного языка). При этом $t_i\in L_t{}^H(S)$ и все траектории цепочки $t_1, t_2,\ldots, t_m$ образуют траекторную сеть W относительно t_1.

Определим формальный язык — представитель семейства $L_c(S)$, алфавитом для которого служили бы «траектории», а цепочки составлялись бы из траекторий, образующих определенным образом построенные траекторные сети. В табл. 1 приведена грамматика зон Γ_Z, которая входит в класс грамматик НФППГ, заданный в [1]. В этой грамматике в отличие от $\Gamma_t^{(1)}$ и $\Gamma_t^{(2)}$ [1] есть нетождественные функциональные формулы π_f, задающие изменение в процессе вывода отображения $\gamma(f)$ функциональных символов $f\in Fvar$. Ниже представлена интерпретация функциональных символов грамматики зон Γ_Z.

$$D(\text{init})=X\times X\times \mathbf{Z}_+\times \mathbf{Z}_+.$$

$$\text{init}(u,r)=\begin{cases}2n, & \text{если } u=(0,0,0),\\ r, & \text{если } u\neq(0,0,0),\end{cases}$$

$$D(f)=(X\times X\times \mathbf{Z}_+\cup\{(0,\ 0,\ 0)\})\times \mathbf{Z}_+$$

$$f(u,v)=\begin{cases}(x+1,y,l), & \text{если } (x\neq n)\wedge(l>0)\\ (1,y+1,\text{TIME}(y+1)\cdot v_{y+1}), & \text{если } (x=n)\vee((l\leqslant 0)\wedge(y\neq n))\\ (0,0,0), & \text{если } (x=n)\wedge(y=n).\end{cases}$$

$D(\text{DIST})=X\times P\times L_t{}^{l_0}(S)$, пусть $t_0\in L_t{}^{l_0}(S)$, $t_0=\alpha(z_0)\alpha(z_1)\ldots\alpha(z_m)$; если для некоторого $k(1\leqslant k\leqslant m)x=z_k$, то $\text{DIST}(x,\ p_0,\ t_0)=k+1$, иначе $\text{DIST}(x,\ p_0,\ t_0)=2n$. При этом $t_0\in t_{p_0}(z_0,\ z_m,\ m)$. $D(\text{ALPHA})=X\times P\times L_t{}^{l_0}(S)\times \mathbf{Z}_+$,

$$\text{ALPHA}(x,p_0,t_0,k)=\begin{cases}\min(\text{NEXTTIME}(x),k), & \text{если } \text{DIST}(x,p_0,t_0)<2n,\\ \text{NEXTTIME}(x), & \text{если } \text{DIST}(x,p_0,t_0)=2n.\end{cases}$$

$$g_r(p_0,t_0,w)=\begin{cases}1, & \text{если } \text{DIST}(r,p_0,t_0)<2n,\\ w_r, & \text{если } \text{DIST}(r,p_0,t_0)=2n,\end{cases}\quad D(g_r)=P\times L_t{}^{l_0}(S)\times \mathbf{Z}_+{}^n.$$

$D(h_i^0)=X\times X\times \mathbf{Z}_+$; обозначим $\text{TPACKS}_{p_0}=\{p_0\}\times(\bigcup\limits_{1\leqslant k\leqslant l} L[\Gamma_t^{(2)}x,y,k,p_0]);$ если $\text{TPACKS}_{p_0}=e$, то $h_i(u)=e$, иначе $\text{TPACKS}_{p_0}=\{(p_0,\ t_1),\ (p_0,\ t_2),\ldots,(p_0,\ t_b)\}\ (b\leqslant M)$ и

$$h_i^0(u)=\begin{cases}(p_0,t_i), & \text{если } i\leqslant b;\\ (p_0,t_i), & \text{если } i>b.\end{cases}$$

$D(h_i)=X\times X\times \mathbf{Z}_+$; обозначим $\text{TPACKS}=\bigcup\limits_{ON(p)=x}\text{TPACKS}_p$, если $\text{TPACKS}=e$, то $h_i(u)=e$, иначе $\text{TPACKS}=\{(p_1,\ t_1),(p_2,\ t_2),\ldots,(p_m,\ t_m)\}$ $(m\leqslant M)$ и

$$h_i(u)=\begin{cases}(p_i,t_i), & \text{если } i\leqslant m;\\ (p_m,t_m), & \text{если } i>m.\end{cases}$$

Таким образом, зона есть цепочка символов вида $Z=t(h_i(u_0),\ \tau_0)\cdot t(h_{j_1}(u_1),\ \tau_1)\ldots t(h_{j_k}(u_k),\ \tau_k)=t(p_0,\ t_0,\ \tau_0)t(p_1,\ t_1,\ \tau_1)\ldots t(p_k,\ t_k,\ \tau_k)$, где $u_n=(x_n,\ y_n,\ l_n)$.

О п р е д е л е н и е 1.7. *Языком зон* для системы в состоянии S называется язык $L_Z(S)$, порождаемый грамматикой Γ_Z (табл. 1) в состоянии S.

О п р е д е л е н и е 1.8. *Алфавитом* $A(Z)$ цепочки Z параметрического языка L называется совокупность символов языка с фиксированными значениями параметров, причем каждый из этих символов с параметрами хотя бы однократно входит в цепочку Z, а также e (пустой символ).

О п р е д е л е н и е 1.9. *Траекторным алфавитом* $TA(Z)$ зоны Z называется совокупность траекторий из $L_t^{н}(S)$, соответствующих значениям параметров алфавита зоны Z.

Т е о р е м а 1.1. Для любой цепочки $Z \in L_Z(S)$ траектории из $TA(Z)$ образуют траекторную сеть, т. е. $L_Z(S) \in L_c(S)$.

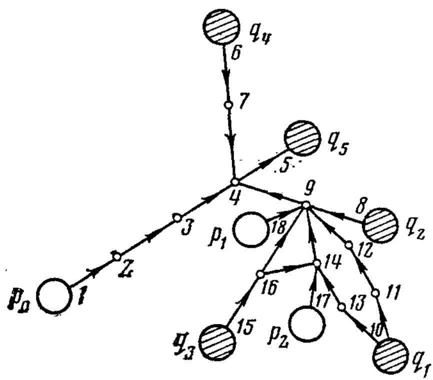
Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим цепочку $Z = t(p_0, t_0, \tau_0) \ldots t(p_k, t_k, \tau_k)$. Очевидно, при условии истинности предиката Q_1 символ $t(p_0, t_0, \tau_0)$ присоединяется к цепочке применением продукций 1 и 2_i. Проведем доказательство по индукции. Предположим, что все траектории подцепочки $t(p_0, t_0, \tau_0) \ldots t(p_m, t_m, \tau_m)$ $(m<k)$ образуют траекторную сеть.

Символ $t(p_{m+1}, t_{m+1}, \tau_{m+1})$ может быть присоединен к цепочке лишь после применения продукции с меткой 4_j. Среди параметров траектории $t_{m+1} \in t_p(x, y, l)$ нас интересует значение y — параметрической буквы последнего символа траектории. К продукции с меткой 4_j можно перейти лишь после успешного применения продукции с меткой 3 (переход по F_S). Здесь функция $f(u, v)$ изменяет значение параметра $u = (x, y, l)$. Ясно, что при последнем изменении $yf(x_0, y_0, l_0, v) = (x, y, l)$, некоторое y_0 заменилось на $y = y_0 + 1$, причем $l = \mathrm{TIME}(y) \cdot v_y \neq 0$, т. к. иначе данное изменение y, а значит и l, было бы не последним (перед применением продукции с меткой 4_j), поскольку все попытки применения продукции с меткой 4_j при $l=0$ были бы безуспешными (при $l=0$ $Q=F$). Итак, $\mathrm{TIME}(y) \neq 0$ и $v_y \neq 0$. Последнее по ходу вывода изменение значения v_y могло произойти лишь при успешном применении продукции с меткой 5. Здесь после применения продукции v_y было присвоено значение w_y. Значит $w_y \neq 0$. Наконец, такое изменение значения w_y, при котором оно стало бы отличным от нуля, могло произойти лишь при успешном применении выше в дереве вывода одной из продукций с меткой 4_j. Это означает, что на некотором этапе вывода в цепочку Z был включен символ $t(p_j, t_j, \tau_j)$. При этом параметр $w^0 = (w_1^0, \ldots, w_n^0)$ изменился под действием функции $g(h_j(u), w^0)$ таким образом, что $w_y = g_y(h_j(u), w^0)$. Но $w_y \neq 0$, следовательно, $w_y = 1$, т. е. $\mathrm{DIST}(y, p_j, t_j) < 2n$, значит y содержится среди параметрических букв траектории t_j. Кроме того, очевидно, что эта траектория содержится среди траекторий $t_0, t_1, \ldots, t_m$, поскольку символ $t(p_j, t_j, \tau_j)$ был включен в Z выше в дереве вывода.

В соответствии с определением 1.1 траектория t_{m+1} связана с траекторией t_i, т. е. имеет место $C(t_{m+1}, t_i) = T$, причем $i \leqslant m$. Но по предположению индукции $C^+_{TA(Z)}$ $(t_i, t_0) = T$ и, учитывая определения 1.3—1.5, заключаем, что $C^+_{TA(Z)}$ $(t_{m+1}, t_0) = T$ (транзитивность C^+). Таким образом, все траектории $t_0, t_1, \ldots, t_{m+1}$ образуют траекторную сеть. Теорема доказана.

П р и м е р 1.1. В реализованных моделях планирования ремонтов язык зон еще не применялся в полном объеме. Поэтому в качестве примера рассмотрим перспективную модель планирования ремонтов энергооборудования. В этой модели символу $t(p_0, t_0, \tau_0)$ зоны Z соответствует ремонт заявленного агрегата. Остальным символам зоны соответствуют различные источники ресурсов с траекториями их «доставки» аналогично траекториям доставки резерва мощности [1]. Часть ресурсов необходимы непосредственно для ремонта агрегата к определенному дню после начала ремонта. Они соответствуют символам $t(p_i, t_i, \tau_i)$ таким, что $C(t_i, t_0) = T$. Их доставка должна потребовать не более чем τ_i дней. Остальные ресурсы необходимы для обеспечения доставки тех, что упомянуты выше, например, обеспечение транспорта; им соответствуют символы $t(p_k, t_k, \tau_k)$, $C^l(t_k, t_0)=T (l>1)$. Среди источников ресурсов могут содержаться альтернативные, т. е. такие, среди которых возможен выбор в процессе перебора вариантов плана. Отметим здесь, что в моделях планирования помимо языка зон имеют смысл и другие возможные языки — представители семейства L_c.

Пример 1.2. В шахматной модели [2] языку зон соответствует множество зон игры. Символу $t(p_0, t_0, \tau_0)$ некоторой зоны соответствует «комлевая» траектория, причем время передвижения по ней определяется предельным горизонтом H. Остальным символам $t(p_i, t_i, \tau_i)$ соответствуют траектории «отрицания». Если $C^k(t_i, t_0)=T$, то t_i — траектория k-го отрицания. Параметр τ_i здесь совпадает с параметром T_x, характеризующим время, отпущенное фигуре на перемещение по траектории t_i. Пример совокупности двух зон Z_1 и Z_2 с общей комлевой траекторией 1—2—3—4—5 схематически изображен на рисунке. Здесь 6—7—4 и 8—9—4 траектории первого отрицания (подробнее см. пример 3.1). Среди других представителей семейства L_c в шахматной модели назовем сложную зону — совокупность зоны нападения и связанных зон [2].



Интерпретация языка зон на модели шахматной игры

2. Свойства переводов. Введенный в п. 1 язык зон позволяет описывать состояния системы. Здесь мы перейдем к описанию «динамики» системы, т. е. переходов из одного состояния в другое. Определим отношение перевода.

Определение 2.1. Пусть A_1 — входной алфавит, A_2 — выходной алфавит. *Отношением перевода* с языка $L_1 \subseteq A_1{}^*$ на язык $L_2 \subseteq A_2{}^*$ называется бинарное отношение Tr из L_1 в L_2, для которого L_1 — область определения, L_2 — множество значений. Если имеет место $Tr(a, b)$, то цепочка b называется выходом для цепочки a — входа.

В общем случае для каждой входной цепочки может быть несколько выходных. Однако в нашем случае мы сможем рассматривать отношение перевода как отображение, т. е. «для каждого входа — не более одного выхода».

Определение 2.2. Пусть система совершает переход из состояния S_1 в состояние S_2 путем применения оператора M_0=ПЕРЕХОД(p_{M_0}, x_0, x_1), причем состояния S_1, S_2 описываются языками $L_t{}^H(S_1)$ и $L_t{}^H(S_2)$ соответственно. *Переводом языков траекторий*, соответствующим оператору M_0, называется отображение $\Pi_{M_0}: L_t{}^H(S_1) \to L_t{}^H(S_2)$, заданное следующим образом. Рассмотрим множество всех траекторий из $L_t{}^H(S_1) t_1, t_2, \dots, t_m$ с началом в x_0. Пусть $k (k \leqslant m)$ из этих траекторий имеют x_1 в качестве значения параметра второго элемента цепочек: $t_1=\alpha(x_0)\alpha(x_1)\dots\alpha(y_1), \dots$ $\dots, t_k=\alpha(x_0)\alpha(x_1)\dots\alpha(y_k), \dots, t_m=\alpha(x_0)\alpha(x_1{}^m), \dots \alpha(y_m)$, где $x_1^{k+1} \neq$ $\neq x_1, \dots, x_1{}^m \neq x_1$. Для траекторий $t_1, \dots, t_k$ рассмотрим подцепочки, полученные исключением первого символа $t_1', \dots, t_k'$. Очевидно, в состоянии S_2 цепочки $t_1', \dots, t_k'$ являются траекториями, т. к. после применения оператора ПЕРЕХОД(p_{M_0}, x_0, x_1) ППФ $ON(p_{M_0})=x_0$ заменяется на $ON(p_{M_0})=$ $=x_1$. Положим: $\Pi_{M_0}(t)=t_i'$, если $t=t_i$ $(i=1, 2, \dots, k)$; $\Pi_{M_0}(t)=e$, если $t=t_j$ $(j=k+1, k+2, \dots, m)$ или $t \in t_p(x, y, l)$, $ON(p)=x_1$ содержится среди взятых ППФ в операторе M_0 или $t=e$; $\Pi_{M_0}(t)=t$ в остальных случаях. Отображение Π_{M_0} не является отображением «на» и имеет непустое ядро, т. е. непустой прообраз e.

Определение 2.3. Пусть в условиях определения 2.2 состояния S_1 и S_2 описываются также языками зон $L_Z(S_1)$ и $L_Z(S_2)$ соответственно. *Переводом языков зон*, соответствующим оператору M_0 называется отображение $\Pi_{M_0}: L_Z(S_1) \to L_Z(S_2)$, сопоставляющее каждой цепочке языка $L_Z(S_1)$ некоторую цепочку языка $L_Z(S_2)$ (возможно, пустую) по следующему правилу: если $Z_1 \in L_Z(S_1)$, $Z_1 = t(p_0, t_0^1, \tau_0^1) \ldots t(p_k^1, t_k^1, \tau_k^1)$, $Z_2 \in L_Z(S_2)$, $Z_2 = t(p_0, t_0^2, \tau_0^2) \ldots t(p_m^2, t_m^2, \tau_m^2)$, то $\Pi_{M_0}(Z_1) = Z_2$ тогда и только тогда, когда $\Pi_{M_0}(t_0^1) = t_0^2$.

Перевод с одного языка зон на другой индуцирует отображение π_0 алфавитов цепочек.

Определение 2.4. Пусть Π_{M_0} — перевод языков зон, причем $\pi_{M_0}(Z_1) = Z_2$. *Отображением алфавитов* π_0 зон Z_1 и Z_2 называется отображение $\pi_0: A(Z_1) \to A(Z_2)$, которое строится следующим образом для всех символов из $A(Z_1)$: $\pi_0(t(p, t_i, \tau_1)) = t(p, \Pi_{M_0}(t_j), \tau_2)$, если $\exists \tau_2 \in \mathrm{Z}_+$, $\tau_2 > 0$ такое, что $t(p, \Pi_{M_0}(t_j), \tau_2) \in A(Z_2) \setminus \{e\}$; $\pi_0(t(p, t_j, \tau_1)) = c$ в остальных случаях.

Вообще говоря, π_0 — неоднозначное отображение, однако мы введем ограничения, при которых π_0 будет однозначным (см. ниже теорему 2.1).

Обозначим $Ker\, \pi_0 = \{t \in A(Z_1) \mid \pi_0(t) = e\}$ — ядро перевода, $\mathrm{Coker}\, \pi_0 = A(Z_2) \setminus \mathrm{Im}\, \pi_0$ — коядро перевода, $Con_\pi(Z_1) = \{t(p_i, t_i, \tau_i) \in A(Z_1) \setminus \{e\} \mid C^+_{\pi(TA(Z_1))}, (\Pi_{M_0}(t_i), \Pi_{M_0}(t_0)) = T\}$ — инвариантная подсеть зоны Z_1 относительно перевода π_{M_0}.

При переходах системы из одного состояния S_1 в другое S_2 происходят переводы языков траекторий и зон. При этом зоны одного языка переводятся в зоны другого. Чтобы построить язык $L_Z(S_2)$, используя $L_Z(S_1)$, надо выяснить, не порождая язык $L_Z(S_2)$ (т. е. не применяя грамматику зон Γ_Z в состоянии S_2), какие траектории зоны Z_1 (из языка $L_Z(S_1)$) содержатся в ее переводе на язык $L_Z(S_2)$. Равносильный вопрос: какие траектории при отображении π_0 переходят в пустую цепочку. Это означает, что нужно выяснить структуру ядра перевода. Чтобы сформулировать соответствующую теорему введем оператор tx_π (зависящий от перевода π), отображающий инвариантную подсеть зоны в Z.

Определение 2.5. Пусть $\pi_{M_0}: L_Z(S_1) \to L_Z(S_2)$ перевод, причем $Z_1 = t(p_0, t_0, \tau_0) t(p_1, t_1, \tau_1) \ldots t(p_r, t_r, \tau_r)$, $Z_1 \in L_Z(S_1)$, $Z_2 \in L_Z(S_2)$, $\pi_{M_0}(Z_1) = Z_2$. *Оператором* tx_π называется отображение $tx_\pi: Con_\pi(Z_1) \to Z$, которое строится следующим образом в зависимости от перевода π_{M_0}. Рассмотрим три случая:

(1) Если $\Pi_{M_0}(t_0) = t_0'$, т. е. траектория первого символа зоны переходит в подцепочку с исключенным первым символом (как в определении 2.2), то для всех

$$t(p_c, t_c, \tau) \in Con_\pi(Z_1) \qquad tx_\pi(t(p_c, t_c, \tau)) = \tau - 1.$$

(2) Если $\Pi_{M_0}(t_k) = t_k'$, $t_k' \neq t_k$ исключен первый символ для некоторого $k = 1, 2, \ldots, r$, то определим tx_π рекурсивно.

а) $tx_\pi(t(p_0, t_0, \tau_0)) = \tau_0$, $tx_\pi(t(p_i, t_i, \tau_i)) = \tau_i$ (если $C_{TA(Z_1)}(t_i, t_0) = T$),

б) Пусть $t(p_c, t_c, \tau) \in Con_\Pi(Z_1)$, $CA_{Con\ (Z_1)}(t_c) = \{t_i \in Con_\Pi(Z_1) \mid C(t_c, t_i) = T\}$,

тогда $tx_\pi(t(p_c, t_c, \tau)) = \min\{\mathrm{TNEW}(t_i)\}$, где

$$\mathrm{TNEW}(t_i) = \begin{cases} tx_\pi(t(p_i, t_i, \tau_i)) - l_i + 1, & \text{если } t_i \neq t_k; \\ (\tau_i + 1) - l_i + 1, & \text{если } t_i = t_k, \ (l_i \text{ — длина } t_i). \end{cases}$$

(3) Если $\Pi_{M_0}(t_m) = t_m$ для всех $t_m \in TA(Z_1)$, то $tx_\pi(t(p_c, t_c, \tau)) = \tau$.

Определение 2.6. Множество $\Pi\ (Con_\Pi(Z_1)) = \{t(p_i, \Pi_{M_0}(t_i), tx_\pi(t(p_i, t_i, \tau_i))) / t(p_i, t_i, \tau_i) \in Con_\Pi(Z_1)\}$ называется *сетевым образом зоны* Z_1 относительно перевода π.

Теорема 2.1. Пусть при переводе $\pi_{M_0}(Z_2) = \pi_{M_0}(Z_1)$, причем для всех $t(p_1, t_1, \tau_1) \in A(Z_2) \setminus \Pi(Con_\Pi(Z_1))$ и $t(p_2, t_2, \tau_2) \in \Pi(Con_\Pi(Z_1))$ имеет место $C(t_2, t_1) = F$. Тогда для всякого символа $t(p, t_i, \tau) \in Con_\Pi(Z_1)$ $(t_i \in$ [illegible]

Грамматика зон Γ_Z

$\mathscr{L}$	Q	Ядро	$\pi_f(\forall z \in X)$	F_S	F_F
1	Q_1	$S(u, v, w) \to A(u, v, w)$		*two*	$\varnothing$
2_i	Q_2	$A(u, v, w) \to t(h_i^0(u), l_0+1)$ $A((0, 0, 0), g(h_i(u), w)\text{zero})$	$\text{TIME}(z) = \text{DIST}(z, h_i^0(u))$	3	$\varnothing$
3	Q_3	$A(u, v, w) \to A(f(u, v), v, w)$	$\text{NEXTTIME}(z) = \text{init}(\text{u}, \text{NEXTTIME}(z))$	*four*	5
4_j	Q_4	$A(u, v, w) \to t(h_j(u), \text{TIME}(y))$ $A(u, v, g(h_j(u), w)$	$\text{NEXTTIME}(z) = \text{ALPHA}(z, h_j(u), \text{TIME}(y) - l + 1)$	3	3
5	Q_5	$A(u, v, w) \to A((0, 0, 0), w, \text{zero})$	$\text{TIME}(z) = \text{NEXTTIME}(z)$	3	6
6	Q_6	$A(u, v, w) \to e$		$\varnothing$	$\varnothing$

$V_T = \{t\}$, $V_N = \{S, A\}$, $Pred = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6\}$,

$Var = \{x, y, l, \tau, \Theta, v_1, v_2, \ldots, v_n, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$; для краткости принято:

$u = (x, y, l)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, $\text{zero} = (0, 0, \ldots, 0)$.

$Fcon = \{f_x, f_y, f_l, g_1, g_2, \ldots, g_n, h_1, h_2, \ldots, h_M^0, h_1^0, h_2^0, \ldots, h_M^0, \text{DIST}, \text{init}, \text{ALPHA}\}$,

$f = (f_x, f_y, f_l)$, $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$, $M = |L_t^{l_0}(S)|$ — число траекторий в $L_t^{l_0}(S)$.

$Fvar = \{x_0, y_0, l_0, p_0, \text{TIME}, \text{NEXTTIME}\}$.

$E = Z_+ \cup X \cup P \cup L_t^{l_0}(S)$.

$Q_1(u, p_0) = (ON(p_0) = x) \wedge (\text{MAP}_{x, p_0}(y) \leqslant l) \wedge (l \leqslant l_0) \wedge (\exists q((\text{ON}(q) = y) \wedge \wedge (\chi(p_0, q) = 0)))$

$Q_2 = T$,

$Q_3(u) = (x \neq n) \wedge (y \neq n)$,

$Q_4(u, p_0) = (\exists p_1((ON(p_1) = x) \wedge (l > 0) \wedge (((\chi(p_0, p_1) = 1) \wedge (\text{MAP}_{x, p_1}(y) = 1)) \vee \vee ((\chi(p_0, p_1) = 0) \wedge (\text{MAP}_{x, p_1}(y) \leqslant l))))$,

$Q_5(w) = (w \neq \text{zero})$,

$Q_6 = T$.

$\mathscr{L} = \{1, 3, 5, 6\} \cup two \cup four$, $two = \{2_1, 2_2, \ldots, 2_M\}$, $four = \{4_1, 4_2, \ldots, 4_M\}$.

$Parm$: $S \to Var$, $A \to \{u, v, w\}$, $t = \{p, \theta, \tau\}$.

В начале вывода: $u = (x_0, y_0, l_0)$, $w = \text{zero}$, $v = \text{zero}$, $x_0, y_0 \in X$, $l_0 \in Z_+$, $p_0 \in P$, $\text{TIME}(z) = 2n$ и $\text{NEXTTIME}(z) = 2n$ для всех $z \in X$.

$\in t_p(x, y, l)$, $l > 1$) $\pi_0(t(p, t_i, \tau)) = t(p, \Pi_{M_0}(t_i), tx_\pi(t(p, t_i, \tau)))$ в том и только в том случае, когда $l \leqslant tx_\pi(t(p, t_i, \tau))$.

Доказательство. Пусть $Z_1 = t(p_0, t_0, \tau_0)t(p_1, t_1, \tau_1)\ldots t(p_{r_1}, t_{r_1}, \tau_{r_1})$. Рассмотрим три случая в соответствии с определением 2.4.

1. $\Pi_{M_0}(t_0) = t_0'$ $(t_0' \neq t_0)$, тогда докажем, что для любого символа $t(p_i, t_i, \tau_i) \in Con_\Pi(Z_1)$ $\pi_0(t(p_i, t_i, \tau_i)) = t(p_i, t_i', \tau_i - 1)$ в том и только в том случае, если $l \leqslant \tau_i - 1$. При этом для всех $t_i (t_i \neq t_0)$ $t_i' = t_i$.

Обратимся к грамматике зон Γ_Z (табл. 1). Для терминала $t(p_0, t_0, \tau_0) = t(h_i^0(x_0, y_0, l_0), \tau_0)$ из выражения для ядра продукции 2_i получим, что $\tau_0 = l_0 + 1$. В таком случае $\pi(t(p_0, t_0, \tau_0)) = t(h_i^0(x_1, y_0, l_0 - 1), \tau_0')$, причем $\tau_0' = l_0 + 1$. Кроме того, учитывая, что $\mathscr{P}(t_0') = \{x \in X | \text{DIST}(x, p_0, t_0') < 2n\}$ и при отображении Π_{M_0} между $\mathscr{P}(t_0)$ и $\mathscr{P}(t_0')$ устанавливается соответствие $x_i=y_{i+1}(i=1,\ 2,\dots,\ l-1,\ t_0=\alpha(y_0)\alpha(y_1)\dots\alpha(y_l),\ t_0'=\alpha(x_0)\alpha(x_1)\dots$ $\dots\alpha(x_{l-1}))$ из формулы π_f продукции 2_i вытекает

$$\mathrm{TIME}_{Z_2}(x_i)=\mathrm{DIST}(x_i,\ p_0,\ t_0')=i+1=[(i+1)+1]-1=$$
$$=\mathrm{DIST}(y_{i+1},\ p_0,\ t_0)-1=\mathrm{TIME}_{Z_1}(y_{i+1})-1. \qquad (2.1)$$

Рассмотрим теперь символы $t(p_i,\ t_i,\ \tau_i)\in Con_\Pi(Z_1)$ такие, что $C_{TA(Z_1)}(t_i,\ t_0)=T$. Очевидно, в этом случае $C_{TA(Z_2)}(t_i',\ t_0')=T$, где $t_i'=$ $=\Pi_{M_0}(t_i)=t_i$ (см. определение 1.9). Значения параметра τ_i для терминальных символов $t(p_i,\ t_i,\ \tau_i')\in A(Z_2)$ вычисляются применением продукции 4_j. Учитывая (2.1), получим $\tau_i'=\mathrm{TIME}_{Z_2}(x_i)=\mathrm{TIME}_{Z_2}(y_{i+1})-1=\tau_i-1$. Из определения функций h_i^0 для π_f продукции 2_i вытекает, что $\pi_0(t(p_i,\ t_i,\ \tau_i))=t(p_i,\ t_i,\ tx_\pi(t(p_i,\ t_i,\ \tau_i)))$ тогда и только тогда, когда $l\leqslant\tau_i'$.

Далее проведем доказательство по индукции. Основание индукции доказано выше. Предположим, что для всех $m<m_0$ и $t(p_m,\ t_m,\ \tau_m)$ из условия теоремы 2.1 утверждение верно. Пусть $t(p,\ t_{m_0},\ \tau)\in Con_\Pi(Z_1)$, $t(p,\ t_{m_0},\ \tau)=$ $=t(h_j(x,\ y,\ l),\ \tau)$. Определим $t'_{m_0'}$ и τ' в $t(p,\ t'_{m_0'},\ \tau')=\pi_0(t(p,\ t_{m_0},\ \tau))$. Из определения 1.9 следует, что $t'_{m_0'}=t_{m_0}$. Определим τ'. Учитывая, что терминал $t(h_j(x,\ y,\ l),\ \tau)$ присоединяется к цепочке Z_1, в результате применения продукции 4_j, причем $\tau=\mathrm{TIME}(y)$, определим значения $\mathrm{TIME}_{Z_1}(y)$ и $\mathrm{TIME}_{Z_2}(y)$ перед применением этой продукции. Значение $\mathrm{TIME}_{Z_1}(y)$ было вычислено при более ранних применениях продукции 4_j (формулы π_f) для присоединения символов $(p_m,\ t_m,\ \tau_m)$ таких, что $y\in\mathscr{P}(t_m)$, $m<m_0$ (т. е. $C_{TA(Z_1)}(t_{m_0},\ t_m)=T$). Аналогично вычисляется и $\mathrm{TIME}_{Z_2}(y)$. По условию теоремы для всех $t(p_1,\ t_1,\ \tau_1)\in A(Z_2)\setminus\Pi(Con_\Pi(Z_1))$ и $t(p_2,\ t_2,\ \tau_2)\in$ $\in\Pi(Con_\Pi(Z_1))$ $C_{TA(Z_2)}(t_2,\ t_1)=F$. Это означает, что для всех траекторий $t'_{m'}\in TA(Z_2)$ таких, что $C^k_{TA(Z_2)}(t'_{m_0'},\ t'_{m'})=T$, имеет место $t(p'_{m'},\ t'_{m'},\ \tau_{m'})\in$ $\in\Pi(Con_\Pi(Z_1))$. Таким образом, для каждого m' найдется $m<m_0$ такое, что $t'_{m'}=t_m$, $t(p_m,\ t_m,\ \tau_m)\in Con_\Pi(Z_1)$ и $C_{TA(Z_1)}(t_{m_0},\ t_m)=T$. Для всех таких $t(p_m,$ $t_m,\ \tau_m)$ выполнено предположение индукции, т. е. $tx_\pi(t(p_m,\ t_m,\ \tau_m))=\tau_m-1$ и и $\pi_0(t(p_m,\ t_m,\ \tau_m))=t(p_m,\ t'_{m'},\ \tau_m-1)$ лишь при условии $l_m\leqslant\tau_m$ (l_m — длина t_m). Если это условие не выполнено ни для одной из траекторий из $CA(t_{m_0})$, то $\pi_0(t(p_m,\ t_m,\ \tau_m))=e$ по предположению индукции, следовательно, $\pi_0(t(p,$ $t_{m_0},\ \tau))=e$. Из формулы для случая (1) определения 2.5 и грамматики Γ_Z (табл. 1) вытекает, что $tx_\pi(t(p,\ t_{m_0},\ \tau))<l_{m_0}$. Итак, пусть $l_m\leqslant tx_\pi(t(p_m,\ t_m,$ $\tau_m))$ хотя бы для одной из траекторий связки (например, t_m). Тогда π_f продукции 4_j имеет вид NEXTTIME (x_i)=ALPHA $(x_i,\ p_m,\ t_m,\ \mathrm{TIME}(x_k)-$ $-l+1)$ для всех $x_i\in\mathscr{P}(t_m)$, $t_m\in t_{p_m}(x_0,\ x_k,\ l_m)$. Учитывая, что $t_{m_0}\in t_p(x,\ y,$ $l)$ и $y\in\mathscr{P}(t_m)$, получим:

$\mathrm{NEXTTIME}_{Z_2}(y)=\mathrm{ALPHA}(y,\ h_j(x_0,\ x_k,\ l_m),\ \mathrm{TIME}_{Z_2}(x_k)-l_m+1=$ $=\min(\mathrm{NEXTTIME}_{Z_2}^0(y),\ \mathrm{TIME}_{Z_2}(x_k)-l_m+1=\min(\tau_1',\ \tau_2'-l_m+1)=$ $=\min(tx_\pi(t(p_1,\ t_{m_1},\ \tau_1)),\ tx_\pi(t(p_2,\ t_{m_2},\ \tau_2))-l_m+1)=\min(\tau_1-1,\ (\tau_2-1)-$ $-l_m+1)=\min(\mathrm{NEXTTIME}_{Z_1}^0(y)-1,\ (\mathrm{TIME}_{Z_1}(x_k)-l_m+1)-1)=$ $=\mathrm{NEXTTIME}_{Z_1}(y)-1$, где $\mathrm{NEXTTIME}_{Z_i}^0(y)$ — значения функции $\mathrm{NEXTTIME}(y)$ перед очередным применением продукции 4_j при выводе Z_1 и Z_2 соответственно. Полученные соотношения показывают, что $\pi_0(t(p,\ t_{m_0},\ \tau))=t(p,\ t'_{m_0'},\ \tau-1)\ (t'_{m_0'}=t_{m_0})$ в том и только в том случае, когда $l\leqslant\mathrm{TIME}_{Z_2}(y)=\tau-1=tx_\pi(t(p,\ t_{m_0},\ \tau))$, т. е. для случая 1 теорема 2.1 доказана.

2. $\Pi_{M_0}(t_k)=t_k'$, $t_k'\neq t_k$ (в t_k' исключен первый символ). Тогда докажем, что для любого символа $t(p_i,\ t_i,\ \tau_i)\in Con_\Pi(Z_1)$ имеет место утверждение теоремы. При этом $\Pi_{M_0}(t_i)=t_i$ для всех $t_i\neq t_k$ в соответствии с определением 2,2; tx_π в этом случае определяется рекурсивно (определение 2.5). Проведем доказательство по индукции.

В соответствии с определением 2.5 $tx_\pi(t(p_0,\ t_0,\ \tau_0))=\tau_0$, а $tx_\pi(t(p_i,\ t_i,$ $\tau_i))=\tau_i$ для всех t_i таких, что $C_{TA(Z_1)}(t_i,\ t_0)=T$. $\Pi_{M_0}(t_0)=t_0$, а из продукции 2_i грамматики Γ_Z (табл. 1) следует, что $\tau_0=l_0+1$. Это означает, что

$\pi_0(t(p_0, t_0, \tau_0))=t(p_0, t_0, l_0+1)=t(p_0, t_0, tx_\pi(t(p_0, t_0, \tau_0)))$. Величина τ_i' в $t(p_i, \Pi_{M_0}(t_i), \tau_i')$ в соответствии с продукцией 4_j зависит лишь от значения TIME(y) (y — конец траектории $\Pi_{M_0}(t_i)$) в состояниях S_1 и S_2. Очевидно, t_i и $\Pi_{M_0}(t_i)$ ($\Pi_{M_0}(t_i)\neq e$) всегда имеют общий конец. TIME(y) полностью определяется формулой π_f продукции 2_i, т. е. траекторией t_0. Но $\Pi_{M_0}(t_0)=t_0$, следовательно, $\mathrm{TIME}_{Z_1}(y)=\mathrm{TIME}_{Z_2}(y)$, т. е. $\tau_i'=\tau_i$. Отсюда $\pi_0(t(p_i, t_i, \tau_i))=t(p_i, \Pi_{M_0}(t_i), \tau_i)=t(p_i, \Pi_{M_0}(t_i), tx_\pi(t(p_i, t_i, \tau_i)))$. Основание индукции доказано.

Предположим, что для всех $t(p_m, t_m, \tau_m)\in Con_\Pi(Z_1)$ таких, что $m<m_0$, теорема 2.1 доказана. Пусть $t(p, t_{m_0}, \tau)\in Con_\Pi(Z_1)$, $t(p, t_{m_0}, \tau)=t(h_j(x, y, l), \tau)$. Определим τ' в $t(p, t'_{m_0'}, \tau')\in A(Z_2)\setminus\{e\}$ (если он существует и $t'_{m_0'}=\Pi_{M_0}(t_{m_0})$). Как и в случае 1, для этого надо определить значение $\mathrm{TIME}_{Z_2}(y)$ перед применением соответствующей продукции 4_j. Рассмотрим множество траекторий $CA(t'_{m_0'})$. Все они по условию теоремы принадлежат $\Pi(Con_\Pi(Z_1))$, а следовательно, для них выполнено предположение индукции (номера их прообразов в цепочке Z_1 меньше m_0). Таким образом, для всех $t_m\in CA(t_{m_0})\,\pi_0(t(p_m, t_m, \tau_m))=t(p_m, \Pi_{M_0}(t_m), tx_\pi(t(p_m, t_m, \tau_m)))\in A(Z_2)\setminus\{e\}$ при условии $l_m\leqslant tx_\pi(t(p_m, t_m, \tau_m))$. Если это условие не выполнено ни для одной из траекторий из $CA(t_{m_0})$, то для них $\pi_0(t(p_m, t_m, \tau_m))=e$ по предположению индукции. Из формул для TNEW(t_i) из определения 2.5 (случай (2)) вытекает, что TNEW$(t_i)<1$, а значит и $tx_\pi(t(p, t_{m_0}, \tau))<1\leqslant l_{m_0}$. С другой стороны, поскольку $\pi_0(t(p_m, t_m, \tau_m))=e$ для всех $t_m\in CA(t_{m_0})$, $\pi_0(t(p, t_{m_0}, \tau))=e$. Итак, пусть $l_m\leqslant tx_\pi(t(p_m, t_m, \tau_m))$ хотя бы для одной из траекторий связки (например, t_m). Тогда, учитывая формулу π_f продукции 4_j, получим текущее значение $\mathrm{NEXTTIME}_{Z_2}(y)$ (перед присоединением символа $t(p_m, \Pi_{M_0}(t_m), \tau_m')$, где $\Pi_{M_0}(t_m)\in t_{p_m}(x_0, x_k, l_m')$, $l_m'=l_m$ или $l_m'=l_m-1$ при $m=$к).

$$\mathrm{NEXTTIME}_{Z_2}(y)=\mathrm{ALPHA}(y, p_m, \Pi_{M_0}(t_m), \mathrm{TIME}_{Z_2}(x_k)-l_m'+1)=$$
$$=\min(\mathrm{NEXTTIME}_{Z_2}^{0}(y), \mathrm{TIME}_{Z_2}(x_k)-l_m'+1)=\min(\tau_0, \tau_m'-l_m'+1)=$$
$$=\min(\min_{CT(m-1)}(tx_\pi(t(p_i, t_i, \tau_i)-l_i+1\}, tx_\pi(t(p_m, t_m, \tau_m))-l_m+1)=$$
$=\min\{\mathrm{TNEW}(t_i)\}$, где $CT(r)=\{t_i\in CA_{Con_\pi(Z_1)}(t_{m_0}), i\leqslant r\}$, $\mathrm{NEXTTIME}_{Z_2}\cdot(y)$ — предыдущее текущее значение. Окончательно, $\mathrm{NEXTTIME}_{Z_2}(y)=\min\limits_{t_i\in CA(t_{m_0})}\{\mathrm{TNEW}(t_i)\}=tx_\pi(t(p, t_{m_0}, \tau))$, следовательно, из Γ_Z $\tau'=tx_\pi(t(p, t_{m_0}, \tau))$ в том и только в том случае, если $l_{m_0}\leqslant tx_\pi(t(p, t_{m_0}, \tau))$. Отметим, что если минимум достигается на траектории t_k или на траектории t_i, у которой $\tau_i'=\tau_i+1$ (т. е. ее «время» определяется цепочкой, связанной с t_k), то $tx_\pi(t(p, t_{m_0}, \tau))=\tau+1$. Иначе $tx_\pi(t(p, t_{m_0}, \tau))=\tau$. Для случая 2 теорема доказана.

3. $\Pi_{M_0}(t_i)=t_i$ для всех $t_i\in TA(Z_1)$. Доказательство очевидно.

Теорема 2.1 доказана.

3. Проблема границ. Сформулируем основную теорему о переводах, отвечающую на вопрос о структуре ядра отображения π_0.

Теорема 3.1. Пусть $\pi_{M_0}: L_Z(S_1)\to L_Z(S_2)$ перевод, причем $\pi_{M_0}(Z_1)=Z_2$, $\pi_0: A(Z_1)\to A(Z_2)$ отображение алфавитов. Пусть $Z_1=t(p_0^1, t_0^1, \tau_0^1)\ldots t(p_{r_1}^1, t_{r_1}^1, \tau_{r_1}^1)$, $Z_2=t(p_0^2, t_0^2, \tau_0^2)\ldots t(p_{r_2}^2, t_{r_2}^2, \tau_{r_2}^2)$ и π_{M_0} удовлетворяет условию: для всех $t(p_1, t_1, \tau_1)\in A(Z_2)\setminus\Pi(Con_\Pi(Z_1))$ и $t(p_2, t_2, \tau_2)\in\Pi(Con_\Pi(Z_1)$ имеет место $C(t_2, t_1)=F$. Пусть также $t_0^1\in t_{p_0^1}(x_0^1, y_0^1, l_0^1)$, $t_0^1=\alpha(x_0^1)\alpha(x'')\ldots\alpha(y_0^1)$, $t_{her}\in t_p(x, y, l)$, $t_{her}=\alpha(x)\alpha(x')\ldots\alpha(y)$ — произвольная траектория из $TA(Z_1)$. Символ $t(p, t_{her}, \tau)$ из $A(Z_1)$ принадлежит ядру $Ker\pi_0$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из трех условий.

(1) Истинно одно из трех утверждений.

а) После применения оператора $M_0=$ПЕРЕХОД(p_{M_0}, x_0, x_1), $(\rceil(\exists q((q\in P)\wedge(ON(q)=y_0^1)\wedge(\chi(p_0, q)=0))))\wedge((x_0=y_0^1)\vee\vee(x_1=y_0^1))$,

б) $((p_0=p_{M_0})\wedge(x_0=x_0^1)\wedge(x_1\neq x''))\vee((x_1=x_0^1)\wedge(\chi(p_0, p_{M_0})=0))$, в) $((p=p_{M_0})\wedge(x_0=x)\wedge(x_1\neq x'))\vee((x_1=x)\wedge(\chi(p, p_{M_0})=0))$.

(2) Пусть $t_{ker}=t_0^1$. Тогда для всякого символа $t(p_i, t_i, \tau_i)\in A(Z_1)$, где $t_i\in CA_{TA(Z_1)}(t_{ker})$, $t_i\in t_{p_i}(x_i, y_i, l_i)$, имеет место: либо $x_0=x_i=y$, либо $t(p_i, t_i, \tau_i)\in Ker\pi_0$.

(3) Пусть $t_{ker}\neq t_0^1$, $t(p, t_{ker}, \tau)\in Con_\Pi(Z_1)$, $l>1$. Тогда $tx_\pi(t(p, t_{ker}, \tau))<l$.

Доказательство. Докажем достаточность этих условий.

Пусть выполнено условие (1а). В соответствии с определениями 2.2 и 2.3 в языке $L_Z(S_2)$ должна содержаться зона Z_2 такая, что $t_0^2=\Pi_{M_0}(t_0^1)$. Это означает, что траектории t_0^1 и t_0^2 имеют общий конец — y_0^1. Но из предиката Q_1 грамматики зон Γ_Z (табл. 1) вытекает, что в случае (1а) $Q_1=F$, т. е. $Z_2=e$. Таким образом, $\pi_{M_0}(Z_1)=e$, а следовательно, $Ker\pi_0=A(Z_1)$, т. е. содержит символ $t(p, t_{ker}, \tau)$.

Пусть выполнено (1б). Тогда по определению 2.2 и из формул (2.2) [1] после применения $M_0(ON(p_0^1)\neq x_0)\wedge(ON(p_0^1)\neq x')$, следовательно, $\Pi_{M_0}(t_0)=e$. В этом случае $Z_2=e$ и далее аналогично (1а).

Пусть выполнено (1в). Тогда из формул (2.2) [1] для оператора перехода изучаемой системы следует, что после применения M_0 либо $ON(p)\neq x_1$ и $ON(p)\neq x_0$, либо на p функция ON вообще не определена. В этом случае по определению 2.2 $\Pi_{M_0}(t_{ker})=e$. Но из определения 2.4, если $t(p, t_{ker}, \tau)\in Ker\pi_0$, то $\exists\tau_2$ $\pi_0(t(p, t_{ker}, \tau))=t(p, \Pi_{M_0}(t_{ker}), \tau_2)\neq e$. Учитывая, что $\Pi_{M_0}(t_{ker})=e$, получаем противоречие. Следовательно $t(p, t_{ker}, \tau)\in Ker\pi_0$.

Пусть выполнено (2) и не выполнено (1). Это означает, что $Z_2\neq e$ и $\Pi_{M_0}(t_{ker})\neq e$. Предположим противное, т. е. что $t(p, t_{ker}, \tau)\notin Ker\pi_0$, тогда $\exists\tau'$ такое, что $\pi_0(t(p, t_{ker}, \tau))=t(p, \Pi_{M_0}(t_{ker}), \tau')\in A(Z_2)\setminus\{e\}$ (по определению 2.4). По теореме 1.1 $C^+_{TA(Z_2)}(\Pi_{M_0}(t_{ker}), t_0^2)=T$, т. е. $\Pi_{M_0}(t_{ker})$ входит в траекторную сеть. Это означает, в частности, что $t(p, t_{ker}, \tau)\in Con_\Pi(Z_1)$, а $t(p, \Pi_{M_0}(t_{ker}), \tau')\in\Pi(Con_\Pi(Z_1))$.

По условию теоремы существует $t(p_j, t_j^2, \tau_j^2)\in B$, $B=A(Z_2)\cap\cap\Pi(Con_\Pi(Z_1))\setminus\{e\}$, причем $C(\Pi_{M_0}(t_{ker}), t_j^2)=T$. Таким образом, найдется $t(p_j, t_j^1, \tau_j^1)\in Con_\Pi(Z_1)$, причем $\pi_0(t(p_j, t_j^1, \tau_j^1))=t(p_j, t_j^2, \tau_j^2)$. Пусть $t_j^1\in t_{p_j}(x_j, y_j, l_j)$. В соответствии с определением 2.2 и, учитывая, что $t_j^2\neq e$, возможны два случая. Первый случай: $x_0=x_j=y$. Но при этом $t_j^2=\Pi_{M_0}(t_j^1)$ является подцепочкой t_j^1 с исключенным первым символом. Следовательно, $y\notin\mathscr{P}(t_j^2)$, а значит, $C(\Pi_{M_0}(t_{ker}), t_j^2)=F$. Получаем противоречие. Второй случай: $(x_0\neq x_j)\vee(x_j\neq y)$. При этом условии $y\in\mathscr{P}(t_j^2)\cap\cap\mathscr{P}(t_j^1)$. В самом деле, если $x_j\neq y$, то $\alpha(y)$ не первый символ и $y\in\mathscr{P}(t_j^2)\cap\mathscr{P}(t_j^1)$. Если же $x_0\neq y_j$, то $t_j^1=t_j^2$ (т. к. $t_j^2\neq e$). Таким образом, $C(t_{ker}, t_j^1)=T$, т. е. $t_j^1\in CA(t_{ker})$. Из условия (2) $t(p_j, t_j^1, \tau_j)\in Ker\pi_0$, т. е. $t_j^2=\Pi_{M_0}(t_j^1)=e$. Получаем противоречие.

Достаточность условия (3) вытекает из теоремы 2.1.

Докажем необходимость. Пусть $Ker\pi_0\neq\varnothing$. Допустим $Ker\pi_0=A(Z_1)$. Если $\Pi_{M_0}(t_0^1)\neq e$, то $\pi_{M_0}(Z_1)=e$ лишь в том случае, когда ППФ $Q_1=F$ в грамматике зон Γ_Z. Это означает, что выполнено условие (1а). Если же $\Pi_{M_0}(t_0^1)=e$, то выполнено (1б) в соответствии с определением 2.2. Если $Ker\pi_0\neq A(Z_1)$, $Ker\pi_0\neq\varnothing$, а также $\Pi_{M_0}(t_{ker})=e$, то выполнено условие (1в). Пусть теперь $t_{ker}\in Ker\pi_0$, $t_{ker}\neq t_0^1$, $t_{ker}\neq e$, $\Pi_{M_0}(t_{ker})\neq e$, $\mathrm{Ker}\,\pi_0=A(Z_1)$. Покажем, что в этом случае выполнено одно из условий: (2) или (3). Предположим, что (2) не выполнено. Тогда существует символ $t(p_i, t_i, \tau_i)\in A(Z_1)$ такой, что $t_i\in CA(t_{ker})$, причем $(x_0\neq x_i)\vee(x_0\neq y)$ и $t(p_i, t_i, \tau_i)\in Ker\pi_0$. Это означает, в частности, что $t(p_i, t_i, \tau_i)\in Con_\Pi(Z_1)$. Заметим, что $t_i\in CA(t_{ker})$, т. е. $C(t_{ker}, t_i)=T$, причем общей точкой этих траекторий является точка y. Т. к. $(x_0\neq x_i)\vee(x_0\neq y)$, после перевода Π_{M_0} связь образов этих траекторий сохраняется, т. е. $C(\Pi_{M_0}(t_{ker}), \Pi_{M_0}(t_i))=T$. Отсюда $t(p, t_{ker}, \tau)\in Con_\Pi(Z_1)$. Кроме того, очевидно, длина l траектории t_{ker} больше единицы, т. к. из табл. 1 (предикат Q_4) вытекает, что с каждой траекторией, содержащейся в алфавите зоны, в нем содержатся и все связанные с ней траектории длины единица; и в этом случае $t(p, t_{ker}, \tau)\notin Ker\pi_0$.

Итак, $t_{ker} \neq t_0^1$, $t(p, t_{ker}, \tau) \in Con_\Pi(Z_1)$, $l > 1$ и $t(p, t_{ker}, \tau) \in Ker\pi_0$. Из теоремы 2.1 следует, что $tx_\pi(t(p, t_{ker}, \tau)) < l$. Необходимость доказана. Теорема 3.1 доказана.

Предположим, что при переводе $\pi_{M_0}: L_Z(S_1) \to L_Z(S_2)$ образом некоторой зоны Z_1 является зона Z_2, причем $TA(Z_2)$ не содержит каких-либо траекторий, не входящих в $TA(Z_1)$ (кроме траекторий с исключенным первым символом $\alpha(x_0)$). В этом случае теорема 3.1 позволяет без применения грамматики зон Γ_Z в состоянии S_2 лишь путем проверки условий (1)—(3) для каждого из символов зоны Z_1 заключить, входит ли он в Z_2.

Ограничение, наложенное на перевод π_{M_0}, существенно. В самом деле при наличии непустого коядра у отображения π_0 выполнение условий (2) или (3) теоремы 3.1 для некоторого символа $t(p, t_{ker}, \tau)$ не гарантирует, что $t(p, t_{ker}, \tau) \in Ker\pi_0$. Может существовать подцепочка связанных траекторий $t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots, t_{n+m}$, причем $t_{n+i} \in TA(Z_2) \setminus TA(Im\pi_0)$, $t_n \in TA(Im\pi_0 \setminus \{e\})$, $C(t_{ker}, t_{n+m}) = T$, $C(t_{n+i}, t_{n+i-1}) = T$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Однако в конкретных задачах эта трудность преодолима. Прежде всего, несмотря на то, что ограничения для π_{M_0} не выполнены, можно считать всякий символ $t(p_i, t_i, \tau_i)$ из $A(Z_1)$, удовлетворяющий условиям (1)—(3) теоремы 3.1, принадлежащим $Ker\pi_0$. После перехода системы в состояние S_2 можно достроить зону Z_1 до зоны Z_2 путем применения грамматики зон Γ_Z для порождения символов, не принадлежащих $Im\pi_0$. При возникновении одного из таких символов (и соответствующей траектории) следует порождать все подцепочки символов, траектории которых связаны с вновь порожденной. Среди них, понятно, могут содержаться символы, которые мы ранее посчитали принадлежащими $Ker\pi_0$.

Для полного решения проблемы границ для данной системы следует выяснить структуру коядра $Coker\pi_0$. Это легко сделать, определив по аналогии обратные переводы $\Pi_{M_0}^{-1}$, $\pi_{M_0}^{-1}$, π_0^{-1}, а также $tx_{\pi^{-1}}$, причем так, чтобы $Ker\,\pi_0^{-1} = Coker\,\pi_0$, а $Coker\,\pi_0^{-1} = Ker\,\pi_0$. Аналогично теоремам 2.1 и 3.1 имеют место соответствующие теоремы об обратных переводах.

Поскольку анализ языка зон лежит в основе процедур выбора приоритетного перехода и отсечения ветвей в процессе перебора по методу ПИОНЕР, высокой эффективности модели можно добиться лишь при оптимизации алгоритма порождения этого языка. При построении варианта перебора, т. е. последовательности переходов системы из состояния S_0 в состояние $S_n (S_0 \to S_1 \to \ldots \to S_n)$, мы имеем возможность не порождать заново в каждом из состояний S_i язык $L_Z(S_i)$ с помощью грамматики Γ_Z, а использовать свойства переводов. Перевод зон осуществляем с помощью отображения π_0, содержимое $Ker\pi_0$ запоминаем в стеке (по глубине в дереве перебора), $Coker\pi_0$ порождаем с помощью Γ_Z. При подъеме по дереву перебора для построения языка зон при обратных переходах перевод зон осуществляем с помощью отображения π_0^{-1}, содержимое $Ker\pi_0^{-1}$ запоминаем (или стираем), $Coker\pi_0^{-1}$ восстанавливаем из стека, поскольку $Coker\pi_0^{-1} = Ker\pi_0$. Этот алгоритм обеспечивает дифференциальный подход к обработке информации: информация о новом состоянии перестраивается из информации о старом [1], не производится пересчет уже сосчитанного, не происходит чрезмерного роста общего объема информации о модели.

П р и м е р 3.1. В модели шахматной игры [2] переводу с одного языка зон на другой соответствует пересчет зон игры при выполнении хода в переборе. Теоремы 2.1 и 3.1 позволяют вычислять изменение параметра τ символа зоны, характеризующего время, отпущенное фигуре для перемещения по своей траектории. Траектории, попавшие в $Ker\pi_0$,— это траектории, выключенные из перебора (занесенные в стек по глубине) до очередного возврата в текущий узел дерева. В терминологии шахматной модели — это траектории, застывающие при спуске по дереву. Теорема 3.1 содержит необходимые и достаточные условия застывания траекторий при спуске и размораживания при подъеме по дереву. Пример пересчета

Таблица 2

Пересчет зон и застывание траекторий (попадание в $Ker\ \pi_0$) на примере шахматной модели, изображенной на рисунке 1

Зоны траектории (l, τ)	ПЕРЕХОД (p, x_0, x_1)					
	$(q_1, 10, 11)$	$(p_0, 1, 2)$	$(q_1, 11, 12)$	$(p_0, 2, 3)$	$(q_2, 8, 9)$	$(p_0, 3, 4)$
Z_1, 10–11–12–9 (3,3)	(2,3)	(2,2)	(1,2)	(1,1)	(1,2)	(1,1)
Z_2, 10–13–14–9 (3,3)	застывает по усл. (1в)					
Z_2 17–14 (1,1)	застывает по усл. (2)					
Z_2 15–16–14 (2,3)	застывает по усл. (2)					
Z_2 15–16–9 (2,3)	(2,3)	(2,2)	(2,2)	(2,1) застывает по усл. (3)		
Z_1, Z_2 18–9	(1,3)	(1,2)	(1,2)	(1,1)	(1,2)	(1,1)
Z_1, Z_2 8–9–4 (2,4)	(2,4)	(2,3)	(2,3)	(2,2)	(1,2)	(1,1)
Z_1, Z_2 6–7–4 (2,4)	(2,4)	(2,3)	(2,3)	(2,2)	(2,2)	(2,1) застывает по усл. (3)

зон и застывания траекторий при построении варианта перебора изображен на рисунке и в табл. 2. Здесь $\{1, 2, \ldots, 18\} \subset X$ [1] множество полей траекторий, т. е. полей шахматной доски, на которые фигуры должны встать при перемещении по траекториям. $P = P_1 \cup P_2$, $P_1 = \{p_0, p_1, p_2\}$ белые фигуры, причем траектория фигуры p_0 $\alpha(1)\alpha(2)\alpha(3)\alpha(4)\alpha(5)$ — первая траектория зоны (комлевая), $P_2 = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$ — черные фигуры. Цель игры белых в зоне — уничтожение мишени — фигуры q_5. При этом p_0 будет производить переход, т. е. перемещаться на очередное поле траектории, всякий раз при очереди хода белых. Черные по своим траекториям должны передвигаться так, чтобы задержать p_0 до подхода к мишени. Этого можно достичь, подведя фигуру q_2 на поле 9 или q_4 на поле 7 до того, как p_0 встанет на поле 4. Для безопасного прохождения поля 9 фигурой q_2 надо на поля 12 или 14 подвести q_1 или фигуру q_3 на поле 16. В процессе построения варианта при очередном ходе выключаться из перебора (застывать) должны траектории, движение по которым потеряло смысл с точки зрения борьбы в зоне. Формально это соответствует тому, что такие траектории не включаются в алфавиты зон в новом состоянии. На рисунке 1 схематически изображена совокупность двух зон Z_1 и Z_2, порождаемых грамматикой Γ_Z для данного примера. В табл. 2 представлен пересчет значений l и τ для каждого символа $t(p, t_i, \tau)$, $t_i \in t_p(x, y, l)$ зон Z_1, Z_2 в процессе выполнения последовательности переходов — ходов фигур q_1, p_0 и q_2. Этот пересчет выполняется в соответствии с определением 2.5 оператора tx_π и теоремой 2.1. В соответствующих клетках отмечено застывание траекторий (попадание в $Ker \pi_0$) и номер условия теоремы 3.1, с выполнением которого связано это застывание. Пересчет зон, застывание траекторий при спуске по дереву и размораживание при подъеме реализованы в программе ПИОНЕР [2].

Пример 3.2. В перспективной модели планирования ремонтов переводу с одного языка зон на другой соответствует пересчет состояния обеспеченности ремонтов ресурсами в очередной день периода планирования. При этом часть ресурсов «приближаются» по своим траекториям к соответствующим точкам траекторий ремонта [1], т. е. к тем дням ремонта, когда их использование необходимо. Это ресурсы, доставка которых уже началась. Траектории других ресурсов не укорачиваются, т. е. доставка их не завершена, однако оставшееся время еще позволяет это сделать. Наконец, часть ресурсов и соответствующих траекторий застывает (не включается в зону в новом состоянии). Это означает, что длины этих траекторий, т. е. время доставки ресурса, превышают максимально возможное время, отведенное для этого сетевым графиком ремонта, начиная с текущего дня. (Застывают также траектории обеспечения доставки ресурса, связанные с уже застывшими траекториями доставки.) Застывание траектории доставки ресурса вовсе не обязательно приведет к тому, что ремонт не будет закончен из-за отсутствия ресурса. Это означает лишь, что в данном варианте плана данный источник ресурса, начиная с текущего дня, уже не может рассматриваться в качестве альтернативного источника, и снабжение этим ресурсом должно осуществляться из оставшихся источников, имеющих незастывшие траектории.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Штильман Б. М.* Формально-лингвистическая модель для решения задач дискретной оптимизации. I. Инструментарий формализации. Язык траекторий. — Изв. АН СССР. Техн. кибернет., 1985, № 3.
2. *Ботвинник М. М.* О решении неточных переборных задач. М.: Сов. радио, 1979.

Москва

Поступила в редакцию 24.IV.1984